UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

CAMPUS ITURAMA - MG

MATEMÁTICA APLICADA I

Programa Nacional de Educação na Reforma Agrária

Prof. Gino Gustavo Maqui Huamán

ITURAMA - MG

2020

Sumário

1 Introdução

A maioria dos problemas da matemática são originados da necessidade de resolver situações da natureza. Numa primeira etapa temos que obter um modelo matemático que represente de maneira conveniente um problema a ser analisado; obtido o modelo matemático procura-se encontrar a sua solução.

Precisamos considerar que, modelo é uma reprodução idealizada de algumas ou todas as características físicas de um processo natural; é um sistema que consegue reproduzir, pelo menos em parte, o comportamento de um processo natural; é uma representação de algum objeto ou sistema, com o objetivo de buscar respostas para diferentes situações por métodos analíticos ou numéricos.

Nesse sentido, o presente material pretende dar os princípios teóricos e práticos de forma que o aluno do PRONERA possa usar a matemática para compreender, valorizar e produzir informações sobre fatos cotidianos e assim reconhecer seu carácter instrumental na agronomia, isto é, uma vez finalizado o curso o aluno saberá reconhecer diversas situações do campo que requererão operações elementais da matemática, formular-as mediante formas simples de expressões matemáticas, resolve-las utilizando os algoritmos correspondentes, assim mesmo, ele estará em capacidade de valorizar o sentido dos resultados e explicar oralmente e por escrito os processos seguidos, desde a formulação do problema, até a interpretação dos resultados.

2 Resolução de triângulos

2.1 Razões trigonométricas

Triângulo retângulo

Triângulo retângulo é todo triângulo que possui um ângulo reto. Neste triângulo o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os demais lados são chamados de catetos, observe a Figura 2.1:

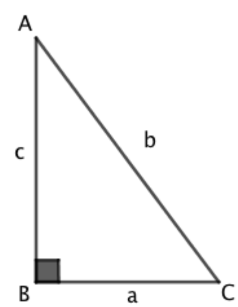

Figura 2.1: Triângulo retângulo

Cada cateto recebe o adicional de oposto ou adjacente dependendo do ângulo de referência da seguinte forma:

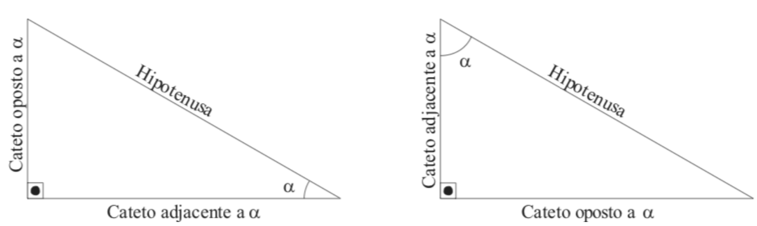

Figura 2.2: Triângulo retângulo

Teorema de Pitágoras Em triângulos retângulos vale a relação: "a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa", que é conhecida como teorema de Pitágoras. Considerando a Figura 2.1, em termos simbólicos tem-se:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Teorema: Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementários. $A + B = 90$

Com estas ferramentas agora é possível estabelecer o conceito de razão trigonométrica, deste modo lembremos que uma razão resulta de comparar duas quantidades, por meio do quociente delas.

2.1.1 Razões trigonométricas

Razão é a relação existente entre dois valores de uma mesma grandeza.

Neste caso chamaremos de razão trigonométrica á razão que se estabelece entre as medidas dos lados de um triângulo, isto com respeito à medida de um dos seus ângulos agudos, então é possível definir seis razões trigonométricas, as mesmas que são chamadas de seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante e que definiremos a seguir.

Considerando a Figura 2.3

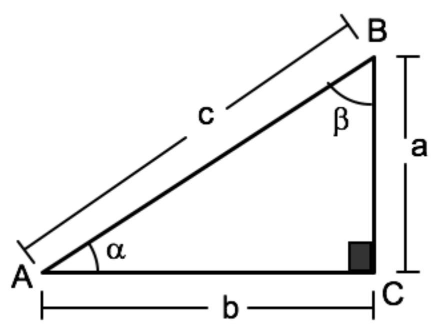

Figura 2.3: Triângulo retângulo

definimos:

Seno $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto Oposto de } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$

Cosseno $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto Adjacente de } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$

Tangente $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto Oposto de } \alpha}{\text{Cateto Adjacente de } \alpha}$

Cotangente $\cot(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto Adjacente de } \alpha}{\text{Cateto Oposto de } \alpha}$

Secante $\sec(\alpha) = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adjacente de } \alpha}$

Cossecante $\sec(\alpha) = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Oposto de } \alpha}$

Exemplo 2.1.1

- *Em um triângulo retângulo ABC (reto em C), sabe-se que a suma dos catetos é k vezes a hipotenusa. Calcular a soma dos senos dos ângulos agudos do triângulo.*

- *Os três lados de um triângulo estão em progressão aritmética, encontrar a tangente do maior ângulo agudo deste triângulo.*

- *Calcular a longitude do menor cateto de um triângulo retângulo de 330m de perímetro, se a tangente de um dos seus ângulos agudos é 2,4.*

2.1.2 Ângulos Verticais

Chamaremos de ângulo vertical a todos aqueles ângulos que são determinados em um plano vertical. O instrumento para medir esses ângulos é o teodolito.

1. **Ângulo de elevação:** É aquele, cuja medida é feita entre a linha visual e a linha horizontal; mas quando o objeto está acima da horizontal.

2. **Ângulo de depressão:** É aquele cuja medição é feita entre a linha visual e a linha horizontal; mas quando o objeto está abaixo da horizontal.

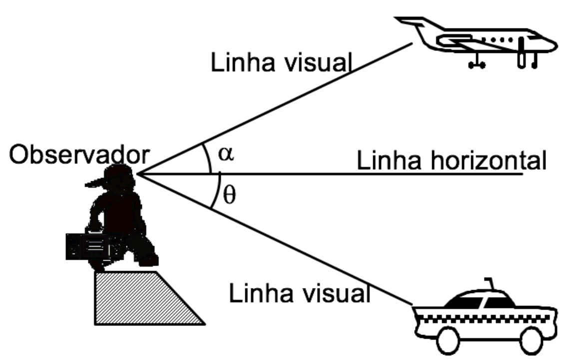

Figura 2.4: Ângulos Verticais

Exemplo 2.1.2 *Um observador mira, mediante um ângulo de 60^o, o topo de uma tore vertical apoiada num plano horizontal. Afastando-se 40 m do pé da tore, passa a mirar seu topo de um ângulo de 30^o. Determine a altura da torre.*

2.1.3 Ângulos Horizontais

São esses ângulos contidos em um plano horizontal. O instrumento de medição para esses ângulos é a bússola.

Os pontos cardeais são os principais pontos de referência para localização sobre a superfície terrestre e constituem-se de quatro (avaliados a 90º).

- **Norte**, inicial **N**, também chamado Setentrional ou Boreal;
- **Sul**, inicial **S**, também chamado Meridional ou Austral;
- **Leste** ou **Este**, inicial **L** ou **E**, também chamado Oriente, Nascente ou Levante por indicar o lado, e não o ponto, onde o Sol nasce;
- **Oeste**, inicial **O** ou **W**, também chamado Ocidente ou Poente por indicar o lado onde o Sol se põe, e não seu ponto exato, o qual se altera durante as diferentes épocas do ano.

As marinhas de Portugal e do Brasil usam a forma leste para evitar confusão com este, mas em geral é mais usual a inicial **E**, até por coerência com as iniciais dos pontos colaterais.

Há também quatro pontos colaterais (avaliados a 45º):

- Nordeste - NE;
- Sudeste - SE;
- Sudoeste - SO ou SW;
- Noroeste - NO ou NW.

Finalmente oito pontos subcolaterais:

- Nor-nordeste - NNE;
- És-nordeste - ENE;
- És-sudeste - ESE;
- Su-sudeste - SSE;
- Su-sudoeste - SSO ou SSW;
- Oés-sudoeste - OSO ou WSW;
- Oés-noroeste - ONO ou WNW;
- Nor-noroeste - NNO ou NNW.

O somatório de todos os pontos cardeais e auxiliares forma a figura conhecida como rosa dos ventos, geralmente inclusa na mesa das agulhas de marear, também conhecidas como bússolas.

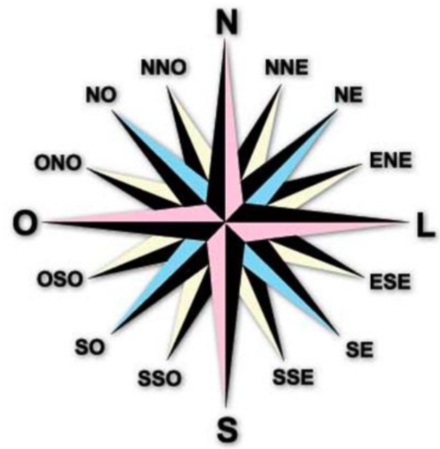

Figura 2.5: Rosa dos Ventos

2.2 Trigonometria em um triângulo qualquer

As razões trigonométricas estabelecidas para os ângulos agudos também são definidas para os outros tipos de ângulos.

Teorema 2.2.1 (Lei dos senos ou teorema dos senos) *Em todo triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles.*

Considerando o triângulo ABC da figura a seguir,

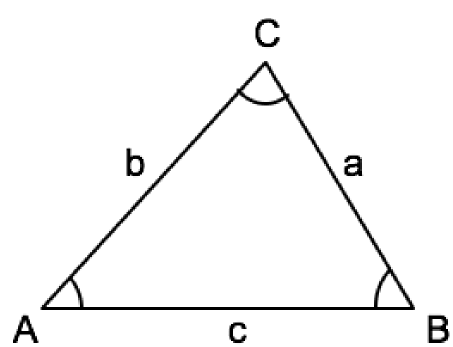

Figura 2.6: Lei de senos.

temos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema 2.2.2 (Lei dos cossenos ou teorema dos cossenos) *Em todo triângulo, o quadrado de qualquer medida de um dos lados é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por esses dois lados.*

Considerando o triângulo ABC da figura a seguir,

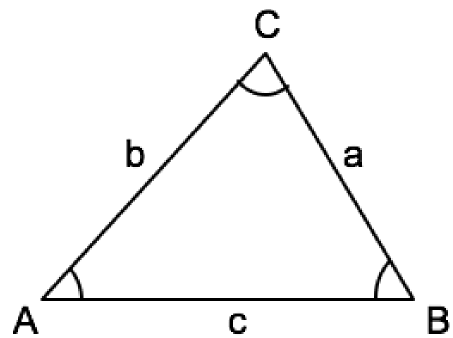

Figura 2.7: Lei de cossenos.

temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + a^2 - 2ab\cos C$$

Exemplo 2.2.1

- *Um carro se desloca 40 km com a direção S60ºO em relação a um ponto de partida, depois ele se desloca 20 km de acordo com a direção N60ºO. Encontre o deslocamento total em relação à sua nova localização.*

- *O ângulo de elevação com o qual a parte superior de um edifício é observado é de 15º, aproximando-se 50 m, o novo ângulo de elevação é o dobro do inicial. Calcule a altura do edifício.*

- *Duas pulgas são colocadas em ambos lados de um poste. Uma delas observa a parte mais alta do poste com um ângulo de elevação de 45º e a outra com um ângulo de elevação de 37º. Se a distância entre as duas pulgas é de 28 m. Qual é a altura do poste?*

3 Vetores

3.1 Introdução

Com o propósito de garantir maior clareza sobre este capítulo, a abordagem do estudo de vetores é feita por meio de dois tratamentos que se completam: o geométrico e o algébrico. A grande vantagem da abordagem geométrica é possibilitar, predominantemente, a visualização dos conceitos que são apresentados para estudo, o que favorece seu entendimento. Posteriormente, os mesmos assuntos e ainda outros são abordados sob o ponto de vista algébrico, mais formal e abstrato.

3.2 Tratamento geométrico

3.2.1 Noção intuitiva

Existem dois tipos de grandezas: as escalares e as vetoriais. As escalares são aquelas que ficam completamente definidas por apenas um número real (acompanhado de uma unidade adequada). Comprimento, área, volume, massa, temperatura, densidade, são exemplos de grandezas escalares. Assim, quando dizemos que uma mesa tem $3m$ de comprimento, que o volume de uma caixa é de $10dm^3$ ou que a temperatura ambiente é de 30º C, determinamos perfeitamente essas grandezas.

Existem, no entanto, grandezas que não são completamente definidas apenas por seu módulo, ou seja, pelo número com sua unidade correspondente. Falamos das grandezas vetoriais, que, para serem perfeitamente caracterizadas, necessitamos conhecer seu módulo (ou comprimento ou intensidade), sua direção e seu sentido. Força, velocidade, aceleração, são exemplos de grandezas vetoriais.

Agora vamos a um exemplo de grandeza vetorial. Consideremos um avião com a velocidade constante de $400km/h$, deslocando-se para o nordeste, sob um ângulo de 40° (lembremos que, na navegação aérea, as direções são dadas pelo ângulo considerado a partir do norte (N), em sentido horário). Esta grandeza (velocidade) seria representada por um segmento orientado, sendo o seu módulo dado pelo comprimento do segmento (no caso, $4cm$, e cada $1cm$ corresponde a $100km/h$), com a direção e o sentido definidos pelo ângulo de 40°. O sentido será indicado por uma seta na extremidade superior do segmento.

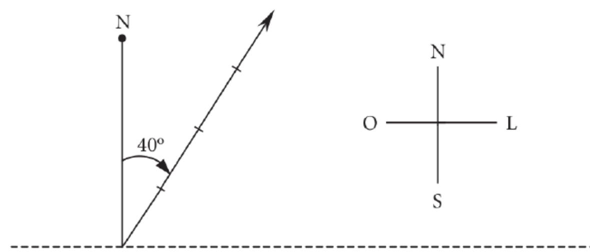

Figura 3.1: N40°L

Observemos que no caso de o ângulo ser 220° (40° + 180°), a direção continua sendo a mesma, porém, o sentido é o oposto. Este exemplo de grandeza vetorial sugere a noção de vetor.

Abstendo-se da ideia de grandezas vetoriais, diríamos que o vetor é representado por um segmento orientado (um segmento está orientado quando nele há um sentido de percurso, considerado positivo).

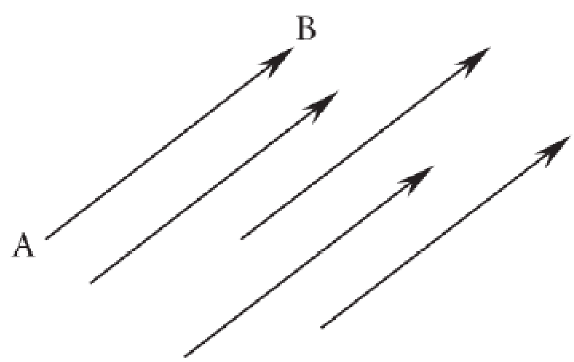

Figura 3.2: Vetores paralelos

Dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido são representantes de um mesmo vetor. Na Figura 3.2 todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento de AB, representam o mesmo vetor, que será indicado por

$$\overrightarrow{AB}$$

em que A é a origem e B a extremidade do segmento. O vetor também costuma ser indicado por uma letra minúscula encimada por uma seta, tal como $\vec{v}$.

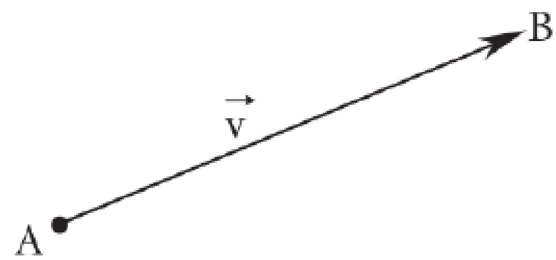

Figura 3.3: Vetor AB

Quando escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ (Figura 3.3), afirmamos que o vetor v é determinado pelo segmento orientado AB. Porém, qualquer outro segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de AB representa também o mesmo vetor $\vec{v}$. Assim, cada ponto do espaço pode ser considerado como origem de um segmento orientado que é representante do vetor $\vec{v}$. Essa é a razão de o vetor também ser chamado de vetor livre, no sentido de que o representante pode ter sua origem colocada em qualquer ponto.

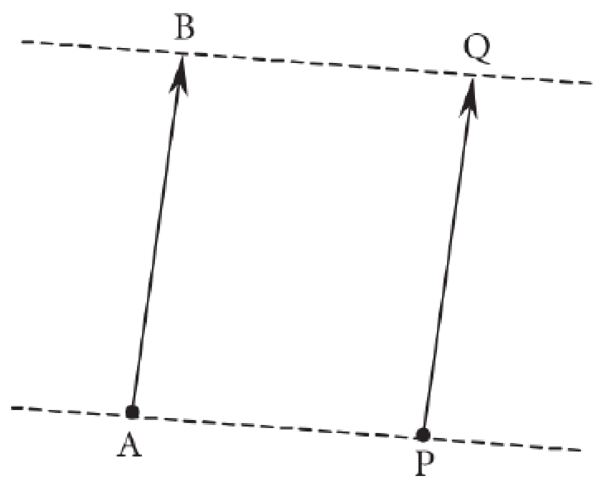

Figura 3.4: Vetores livres

Ainda, dados um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto P, existe um só ponto Q (Figura 3.4) tal que o segmento orientado PQ tenha o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de AB. Portanto, temos também $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, o que reforça o fato de que um representante de $\overrightarrow{v}$ pode ter sua origem em qualquer ponto P do espaço. O módulo, a direção e o sentido de um vetor $\overrightarrow{v}$ é o módulo, a direção e o sentido de qualquer um dos seus representantes. Indica-se o módulo de v por $|v|$ ou $\|v\|$.

3.2.2 Casos particulares de vetores

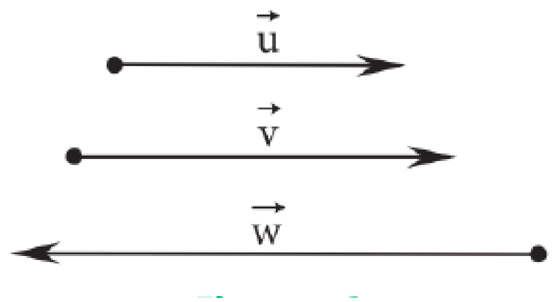

Figura 3.5: Vetores paralelos 1

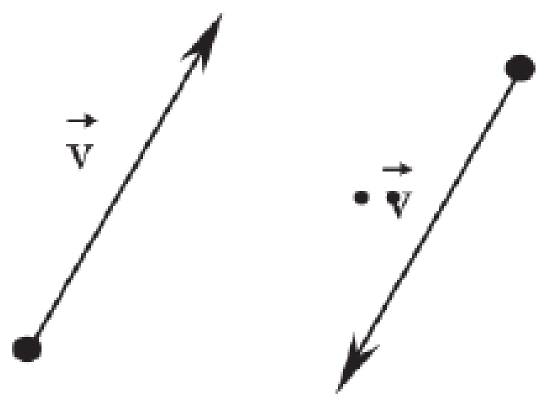

Figura 3.6: Vetores paralelos 2

1. Dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos, e indica-se por $\overrightarrow{U}//\overrightarrow{V}$, se os seus representantes tiverem a mesma direção. Na Figura 3.5, tem-se $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}//\overrightarrow{w}$, na qual $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm o mesmo sentido, enquanto $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm sentido contrário ao de $\overrightarrow{w}$.

2. Dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são iguais, e indica-se por $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, se tiverem iguais o módulo, a direção e o sentido.

3. Qualquer ponto do espaço é representante do vetor zero (ou vetor nulo), que é indicado por $\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{AA}$ (a origem coincide com a extremidade). Pelo fato de esse vetor não possuir direção e sentido definidos, considera-se o vetor zero paralelo a qualquer vetor.

4. A cada vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ corresponde um vetor oposto $-\overrightarrow{v}$, de mesmo módulo e mesma direção de $\overrightarrow{v}$, porém, de sentido contrário (Figura 3.6). Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$.

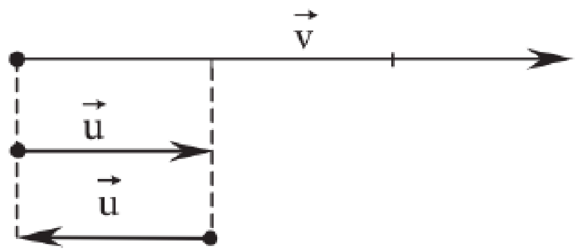

Figura 3.7: Vetores perpendiculares 1

5. Um vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário se $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

   A cada vetor $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, é possível associar dois vetores unitários de mesma direção de $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{u}$ e $-\overrightarrow{u}$ (Figura 3.7). Nesta figura, tem-se $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ e $\|\overrightarrow{u}\| = \|-\overrightarrow{u}\| = 1$. O vetor $\overrightarrow{u}$ que é paralelo e tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$ é chamado versor de $\overrightarrow{v}$. Na verdade o vetor $\overrightarrow{u}$ não é versor só de $\overrightarrow{v}$, mas sim de todos os vetores paralelos e de mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$ e medidos com a mesma unidade.

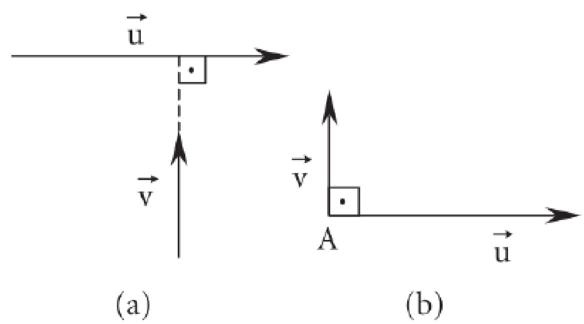

Figura 3.8: Vetores perpendiculares 2

6. Dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ (Figura 3.8(a)) são ortogonais, e indica-se por $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, se algum representante de $\overrightarrow{u}$ formar ângulo reto com algum representante de $\overrightarrow{v}$.

   A Figura 3.8(b) apresenta dois representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, com origem no ponto A, formando ângulo reto.

   Considera-se o vetor zero ortogonal a qualquer vetor.

7. Dois ou mais vetores são coplanares se existir algum plano no qual esses vetores estão representados. É importante observar que dois ve-

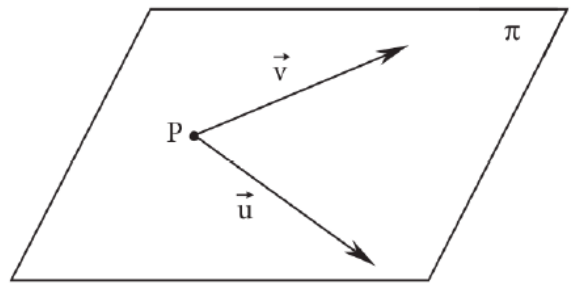

Figura 3.9: Dois vetores coplanares

tores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ quaisquer são sempre coplanares, pois basta considerar um ponto P no espaço e, com origem nele, traçar os dois representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pertencendo ao plano π (Figura 3.9) que passa por aquele ponto.

No caso de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ serem não paralelos, como na Figura 3.9, esses vetores determinam a "direção"do plano π, que é a mesma de todos os planos que lhe são paralelos.

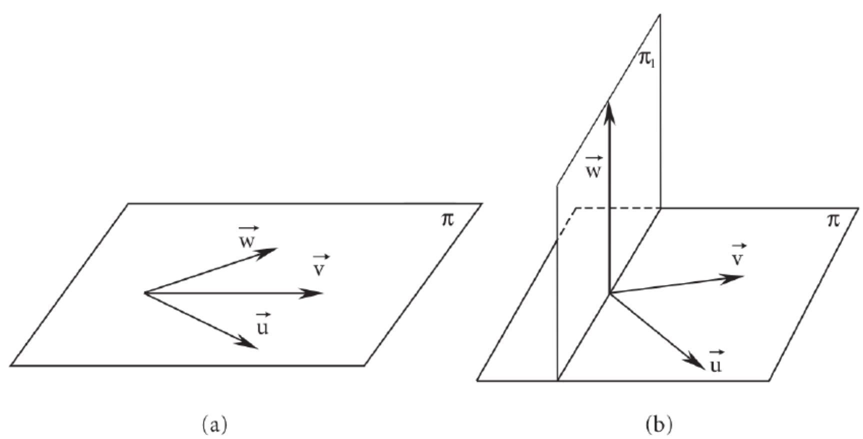

Figura 3.10: Três vetores coplanares e não coplanares

Três vetores podem ser coplanares (Figura 3.10(a)) ou não (Figura 3.10(b)).

3.2.3 Operações com vetores

Adição de vetores

Consideremos os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, cuja soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ pretendemos encontrar. Tomemos um ponto A qualquer (Figura 3.11) e, com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representante do vetor $\overrightarrow{u}$. Utilizemos a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante de $\overrightarrow{v}$. O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por

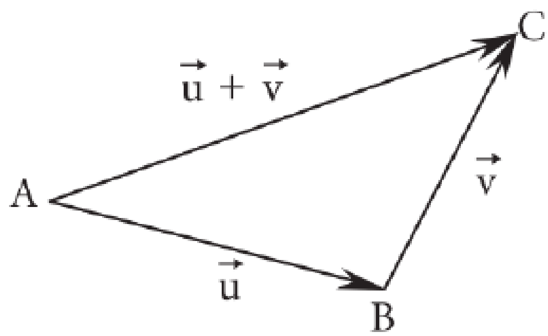

Figura 3.11: Soma de vetores

definição, o vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

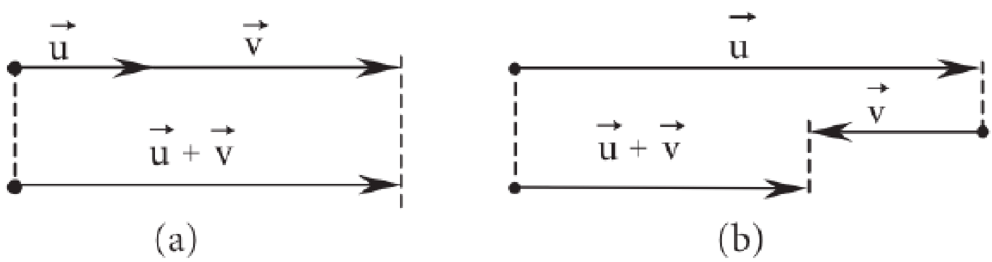

Figura 3.12: Soma de vetores paralelos

Sendo $\vec{u} // \vec{v}$, a maneira de obter o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é a mesma e está ilustrada na Figura 3.12(a) ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesmo sentido) e na Figura 3.12(b) ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ de sentidos contrários).

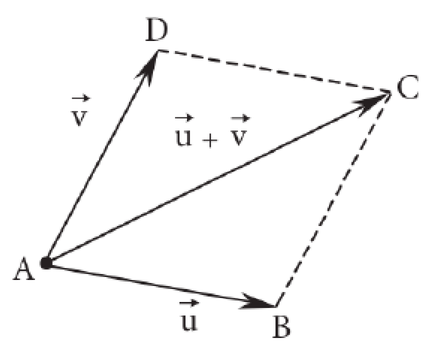

Figura 3.13: Soma de vetores paralelos

No caso de os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não serem paralelos, há outra maneira de encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$. Representam-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A. Completa-se o paralelogramo $ABCD$ (Figura 3.13), e o segmento orientado de origem A, que corresponde à diagonal do paralelogramo, é o vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, ou seja,

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Para o caso de determinar a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo (Figura 3.14(a)) e, em particular, se a extremidade do representante do último vetor coincidir com a origem do representante do primeiro (Figura 3.14(b)), a soma será o vetor zero ($\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{t} = \overrightarrow{0}$).

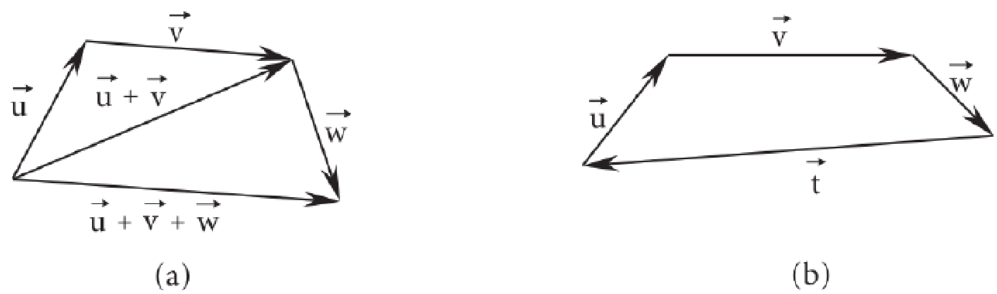

Figura 3.14: Soma de vetores

Sendo $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores quaisquer, a adição admite as seguintes propriedades:

1. Comutativa:
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$$

2. Associativa:
$$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$$

3. Elemento neutro:
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

4. Elemento oposto:
$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$$

O vetor $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$, escreve-se $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, é chamado de diferença entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Observemos que no paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ (Figura 3.15), verifica-se que a soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é representada por uma das diagonais, enquanto a diferença $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ pela outra diagonal.

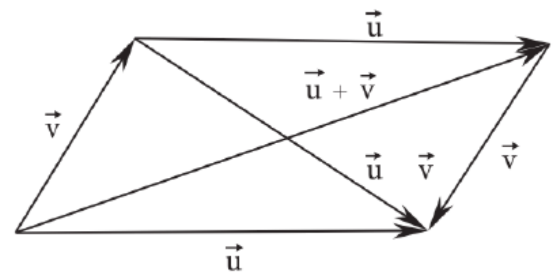

Figura 3.15: Soma e diferença de vetores

Multiplicação de número real por vetor

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e um número real $t \neq 0$, chama-se produto do número real t pelo vetor , o vetor $\overrightarrow{v}$ tal que:

1. módulo: $\|t\overrightarrow{v}\| = |t| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$, ou seja, o comprimento de $t\overrightarrow{v}$ é igual ao comprimento de $\overrightarrow{v}$ multiplicado por $|t|$;
2. direção: $\overrightarrow{tv}$ é paralelo a $\overrightarrow{v}$;
3. sentido: $\overrightarrow{tv}$ e $\overrightarrow{v}$ têm o mesmo sentido se $t > 0$ e contrário se $t < 0$. Se $t = 0$ ou $\overrightarrow{v} = 0$, então $t\overrightarrow{v} = 0$

A Figura 3.16 apresenta o vetor $\overrightarrow{v}$ e alguns de seus múltiplos.

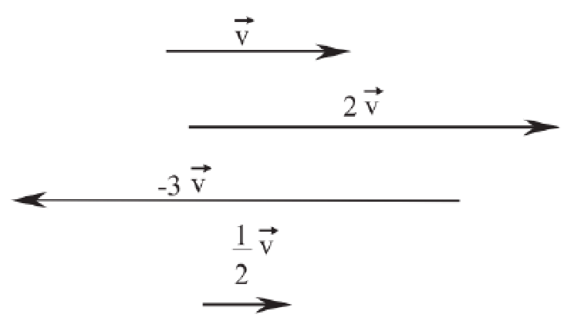

Figura 3.16: Multiplicação de um número real por um vetor

3.2.4 Ângulo entre dois vetores

O ângulo entre os vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o ângulo θ formado por duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de mesma origem O(Figura 3.17), na qual $u\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ e $0 < \theta < \pi$: (θ em radianos) ou $0^o < \theta < 180^o$.

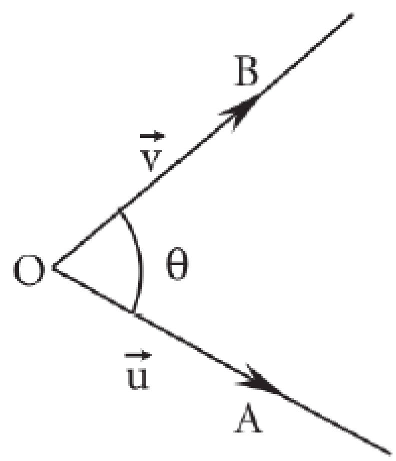

Figura 3.17: Ângulo entre dois vetores

Se $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm o mesmo sentido, então $\theta = 0$. É o que ocorre, por exemplo, com os vetores $\overrightarrow{u}$ e $2\overrightarrow{u}$ que têm o mesmo sentido (Figura 3.18(a)).

Se $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm sentidos contrários, então $\theta = \pi$. É o caso de $\overrightarrow{u}$ e $-3\overrightarrow{u}$ (Figura 3.18(b)).

Figura 3.18: Ângulo entre vetores paralelos

3.2.5 Problemas propostos

3.3 Tratamento algébrico

3.3.1 Vetores no plano

Consideremos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, representados com a origem no mesmo ponto O, sendo r_1 e r_2 retas contendo esses representantes, respectivamente, (Figura 3.19).

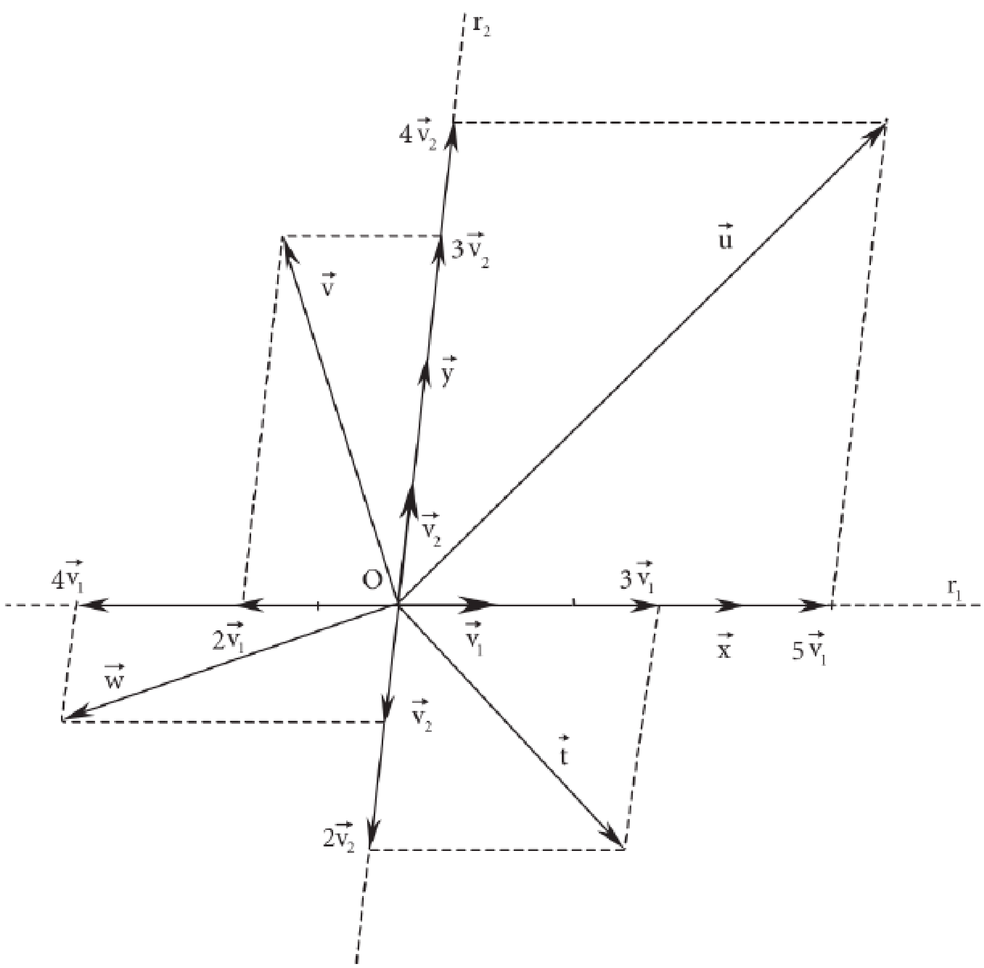

Figura 3.19: Vetores no plano

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$, representados na figura, são expressos em função de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ por

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} &= 5\overrightarrow{v}_1 + 4\overrightarrow{v}_2 \\
\overrightarrow{v} &= -2\overrightarrow{v}_1 + 3\overrightarrow{v}2 \\
\overrightarrow{w} &= -4\overrightarrow{v}_1 - 3\overrightarrow{v}_2 \\
\overrightarrow{t} &= 3\overrightarrow{v}_1 - 2\overrightarrow{v}_2 \\
\overrightarrow{x} &= 4\overrightarrow{v}_1 + 0\overrightarrow{v}_2 \\
\overrightarrow{y} &= 0\overrightarrow{v}_1 + 2\overrightarrow{v}_2
\end{aligned}$$

De modo geral, dados dois vetores quaisquer $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ não paralelos, para cada vetor v representado no mesmo plano de $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$, existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que

$$\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 \tag{3.1}$$

A Figura 3.20 ilustra essa situação, na qual $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ são vetores não paralelos quaisquer e $\overrightarrow{v}$ é um vetor arbitrário do plano determinado por $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$. Quando o vetor v é expresso como em (3.1), diz-se que $\overrightarrow{v}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ O conjunto $B = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ é chamado base no plano. Aliás, qualquer conjunto de dois vetores não paralelos constitui uma base no plano. Embora estejamos simbolizando a base como um conjunto, a pensamos como um conjunto ordenado. Então, dada uma base qualquer no plano, todo vetor desse plano é combinação linear dos vetores dessa base, de modo único.

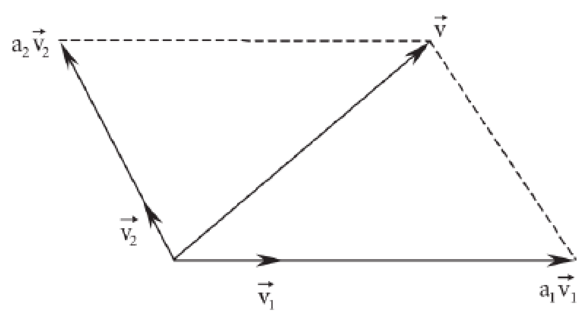

Figura 3.20: Base

Os números a_1 e a_2 da igualdade (3.1) são chamados componentes ou coordenadas de $\overrightarrow{v}$ na base$B$ (a_1 é a primeira componente, e a_2 , a segunda).

O vetor $\overrightarrow{v}$ da igualdade (3.1) pode ser representado também por $v = (a_1, a_2)B$.

Na prática, as bases mais utilizadas são as ortonormais.

Uma base $\{e_1, e_2\}$ é dita ortonormal se seus vetores forem ortogonais e unitários, ou seja, se $e_1 \perp e_2$ e $|e_1| = |e_2 I = 1$.

Entre as infinitas bases ortonormais no plano, uma y delas é particularmente importante. Trata-se da base que determina o conhecido sistema cartesiano ortogonal $x0y$. Os vetores ortogonais e unitários, neste caso, são simbolizados por $\overrightarrow{i}$ e $\overrightarrow{j}$ ambos com origem em 0 e extremidades em $(1,0)$ e $(0,1)$, respectivamente (Figura 3.21), sendo a base $C = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ chamada canónica. Portanto, $\overrightarrow{i} = (1,0)$ e $\overrightarrow{j} = (0,1)$.

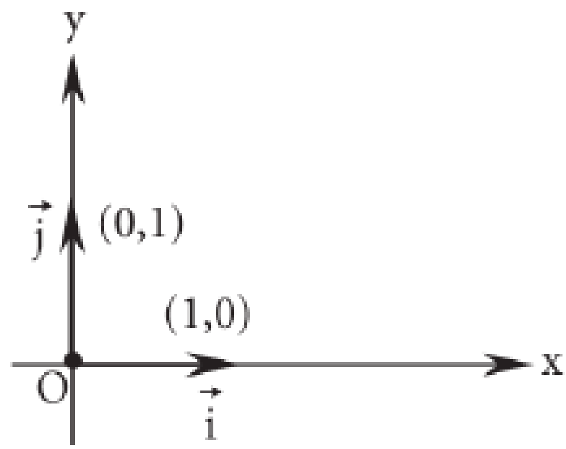

Figura 3.21: Base canónica

Daqui por diante, trataremos somente da base canônica. Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ qualquer do plano (Figura 3.22), existe uma só dupla de números x e y tal que:

$$\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \tag{3.2}$$

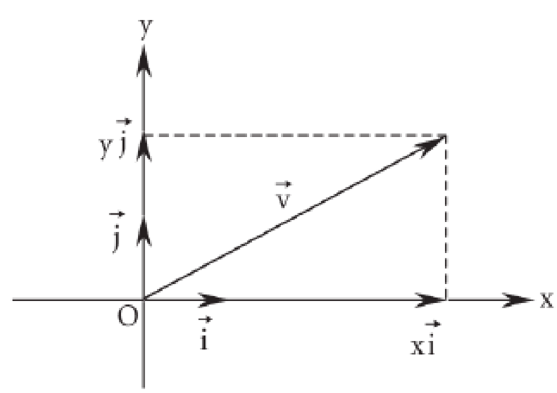

Figura 3.22: Combinação na base canónica

Os números x e y são as componentes de $\overrightarrow{v}$ na base canônica. A primeira componente é chamada abscissa de $\overrightarrow{v}$, e a segunda componente y é a ordenada de $\overrightarrow{v}$.

O vetor $\overrightarrow{v}$ em (3.2) é também representado por

$$\overrightarrow{v} = (x, y) \tag{3.3}$$

dispensando-se a referência à base canônica e.

A igualdade (3.3) sugere a definição:

Vetor no plano é um par ordenado (x, y) de números reais.

O par (x, y) é chamado expressão analítica de $\overrightarrow{v}$. Para exemplificar, veja a seguir alguns vetores e suas correspondentes expressões analíticas:

- $3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} = (3, -5)$
- $3\overrightarrow{j} = (0, 3)$
- $-4\overrightarrow{i} = (-4, 0)$
- $\overrightarrow{0} = (0, 0)$

Observação 3.3.1 *A escolha proposital da base $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ deve-se exclusivamente à simplificação. A cada ponto $P(x, y)$ do plano xOy corresponde o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ (Figura 3.23). Quer dizer que as coordenadas do ponto extremo P são as próprias componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base canônica. Em geral, deixa-se de indicar nos eixos os vetores $\overrightarrow{i}$ e $\overrightarrow{j}$ como se vê na figura.*

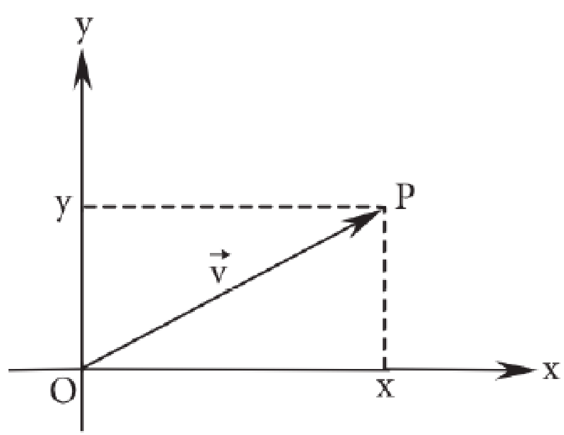

Figura 3.23: Combinação na base canónica

De acordo com as considerações feitas, o plano pode ser encarado como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores.

3.3.2 Igualdade de vetores

Dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, escrevendo-se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

Exemplo 3.3.1 *O vetor $\overrightarrow{u} = (x+1, 4)$ é igual ao vetor $\overrightarrow{v} = (5, 2y-6)$ se $x+1 = 5$ e $2y - 6 = 4$ ou seja $x = 4$ e $y = 5$.*

3.3.3 Operações com vetores

Sejam os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

2. $\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

Portanto, para somar dois vetores, somam-se as correspondentes coordenadas, e para multiplicar um número real por um vetor, multiplica-se cada componente do vetor por este numero.

As Figuras 3.24(a) e 3.24(b) ilustram as definições das operações dadas anteriormente.

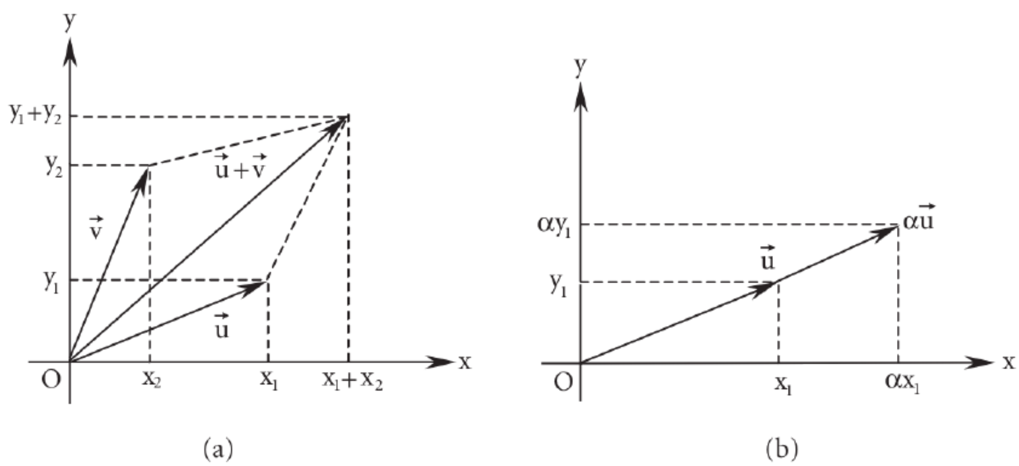

Figura 3.24: Combinação na base canónica

Considerando esses mesmos vetores, tem-se ainda:

- $$-\overrightarrow{u} = (-1)\overrightarrow{u} = (-x_1, -y_1$$

- $$\begin{aligned} \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v}) \\ &= (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) \\ &= (x_1 - y_2, y_1 - y_2) \end{aligned}$$

3.3.4 Ponto médio

Seja o segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (Figura 3.25). Sendo $M(x, y)$ o ponto médio de $\overline{AB}$, podemos expressar de forma vetorial como

$$\overline{AM} \cong \overline{MB}$$

Por tanto

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

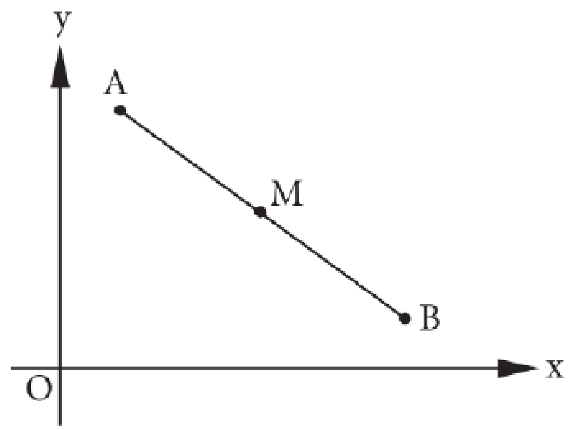

Figura 3.25: Combinação na base canónica

3.3.5 Paralelismo de dois vetores

Vimos que, se dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos, existe um número real a tal que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

3.3.6 Módulo de um vetor

Seja o vetor $v = (x, y)$ (Figura 3.26). Pelo teorema de Pitágoras, vem

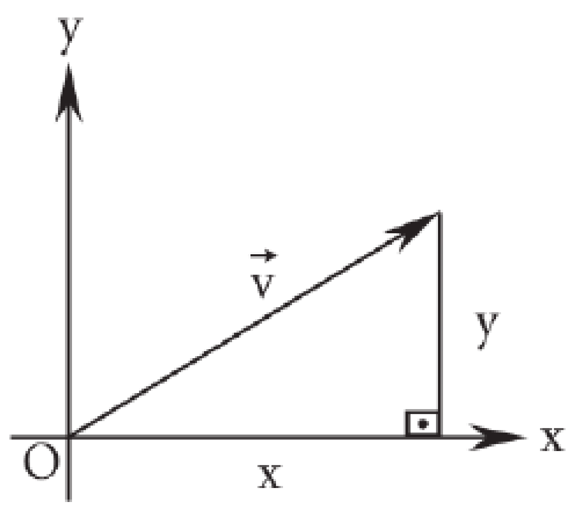

Figura 3.26: Módulo de um vetor